## ЛЕКЦИЯ № 24

### Теорема Лиувилля.

При канонических преобразованиях сохраняется не только вид уравнений Гамильтона, но и некоторые интегралы, т.н. *интегральные инварианты.* Вспомним фазовые портреты динамических систем с одной степенью свободы, рассмотренные в лекции №4, например, фазовый портрет осциллятора в консервативной системе (Рис.24.1).

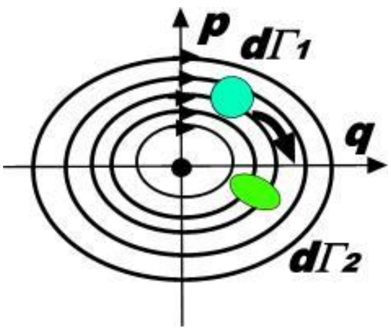


Рис.24.1

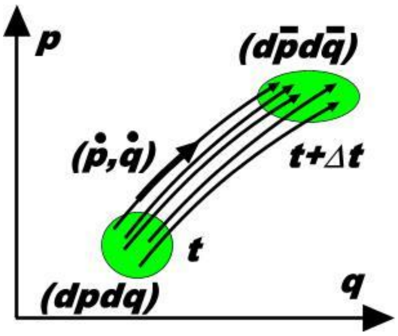


Рис.24.2

Выберем область фазовой плоскости с площадью $d\Gamma_1 = dp(t_1)dq(t_1)$. Через период колебания все изоражающие точки возвратяться в исходное положение. Поэтому фазовый объем перейдет сам в себя. А сохранится ли он в произвольный момент времени? На этот вопрос дает ответ ***теорема Лиувилля***:

Если система является гамильтоновой, то в ее фазовом пространстве с течением времени элемент фазового пространства в процессе динамики не меняет своего объема.

(Простые примеры были приведены в лекции №22. Эта теорема играет фундаментальную роль в статистической механике. Поэтому приведем её доказательство. Прежде всего, рассмотрим изменеия координат и импульсов при бесконечно малом (инфинитезимальном) изменении времени в гамильтоновой системе. Выберем в качестве производящей функции $\Phi(q,P)$, для которой связь новых и старых переменных имеет вид (см.(22.17)):

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}. \tag{24.1}$$

Если в качестве $\Phi(q,P)$ выбрать $\Phi_0 = \sum q_i Q_i$, то получим тождественное преобразование $Q_i = q_i$ и $P_i = p_i$. Поэтому выберем производящую функцию, слабо отличающуюся от нее:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\phi = \sum q_i P_i + \varepsilon\phi(q_i, P_i), \qquad \varepsilon \ll 1. \tag{24.2}$$

Тогда из (24.1) следует

$$p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial\phi(q,P)}{\partial q_i}, \qquad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial\phi(q,P)}{\partial P_i}. \tag{24.3}$$

Поскольку новые и старые импульсы отличаются на малую величину $\varepsilon$, то в основном приближении по $\varepsilon$ (24.3) можно переписать так:

$$P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial\phi(q,p)}{\partial q_i}, \qquad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial\phi(q,p)}{\partial p_i}. \tag{24.4}$$

(Обратите внимание на аргументы). Из уравнений Гамильтона $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ для малых приращений времени следует

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}\Delta t, \qquad q_i(t+\Delta t) = q_i(t) + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}\Delta t. \tag{24.5}$$

Сравнивая эти два выражения с выражениями (24.4), мы видим, что они совпадают, если под $\varepsilon$ понимать бесконечно малое приращение времени $\Delta t = \varepsilon \ll 1$, считать, что $P_i(t) = p_i(t+\Delta t)$, $Q_i(t) = q_i(t+\Delta t)$, и приравнять производящую функцию $\phi$ гамильтониану системы. Т.е. *бесконечно малое изменение гамильтоновой системы со временем является каноническим преобразованием. Движение эквивалентно непрерывно совершаемому каноническому преобразованию, производящей функцией которого является гамильтониан системы.*

Рассмотрим изменение фазового объема при каноническом преобразовании переменных. В теории многократных интегралов есть общая теорема о преобразовании таких интегралов при преобразовании координат. Наиболее просто и наглядно она выглядит лоя случая 2 переменных. Если замена переменных имеет вид $x = x(\varphi,\psi)$, $y = y(\varphi,\psi)$, то

$$\int G(x,y)\,dx\,dy = \int G(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))\,D(x,y;\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi, \tag{24.6}$$

где так называемый *якобиан перехода* имеет вид

$$D(x,y;\varphi,\psi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\psi}\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\psi}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}. \tag{24.7}$$

В нашем случае

$$\iint ...dPdQ=\iint ...D(P,Q;p,q)dpdq \quad \text{с} \quad D=\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}. \tag{24.8}$$

Но, как было показано в лекции №22 (см.(22.23)), эта величина для якобиана перехода *для канонического преобразования* равна единице. Т.е.

$$\iint ...dPdQ=\iint ...dpdq \tag{24.9}$$

и величина фазового объема при каноническом преобразовании сохраняется (см. Рис.22.1). Это доказывает теорему Лиувилля в системе с одной степенью свободы.

Докажем теорему Лиувилля в общем случае произвольного числа степеней свободы. Достаточно ее доказать на инфинитоземальном участке процесса в течении бесконечно малого отрезка времени $\Delta t$. Рассмотрим $2n$ - мерный фазовый объем системы с $n$ степенями свободы $(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n)$ – Рис.24.2. Каждомк начальному условию соответствует своя фазовая траектория своей изображающей точки. Совокупность фазовых траекторий образует *фазовый поток* в фазовом пространстве. Каждая точка фазовой траектории характеризуется своими координатами и импульсами $(\vec{q},\vec{p})$ и вектором скорости изображающей точки $(\dot{\vec{p}},\dot{\vec{q}})$, где все вектора $n-$мерные. Рассмотрим изменения координат и импульсов изображающей точки за время $\Delta t$, если процесс описывается уравнениями Гамильтона. Они определяются уравнениями (24.5). Будем обозначать переменные в начальный момент времени $t$ через $(q,p)$, а в момент времени $t+\Delta t$ через $(\bar{q},\bar{p})$. Тогда уравнения (24.5) перепишутся в виде

$$\bar{p}_i=p_i+\dot{p}_i\Delta t, \qquad \bar{q}_i=q_i+\dot{q}_i\Delta t. \tag{24.5}$$

Для наглядности рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Для нее якобиан перехода в формуле (24.8) $\int ...d\bar{p}d\bar{q}=\int ...D\,dpdq$ имеет вид

$$D=\begin{vmatrix}\partial\bar{p}_1/\partial p_1 & \partial\bar{p}_1/\partial p_2 & \partial\bar{p}_1/\partial q_1 & \partial\bar{p}_1/\partial q_2\\ \partial\bar{p}_2/\partial p_1 & \partial\bar{p}_2/\partial p_2 & \partial\bar{p}_2/\partial q_1 & \partial\bar{p}_2/\partial q_2\\ \partial\bar{q}_1/\partial p_1 & \partial\bar{q}_1/\partial p_2 & \partial\bar{q}_1/\partial q_1 & \partial\bar{q}_1/\partial q_2\\ \partial\bar{q}_2/\partial p_1 & \partial\bar{q}_2/\partial p_2 & \partial\bar{q}_2/\partial q_1 & \partial\bar{q}_2/\partial q_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\partial\dot{p}_1/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial q_2\Delta t\\ \partial\dot{p}_2/\partial p_1\Delta t & 1+\partial\dot{p}_2/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{p}_2/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{p}_2/\partial q_2\Delta t\\ \partial\dot{q}_1/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{q}_1/\partial p_2\Delta t & 1+\partial\dot{q}_1/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{q}_1/\partial q_2\Delta t\\ \partial\dot{q}_2/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{q}_2/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{q}_2/\partial q_1\Delta t & 1+\partial\dot{q}_2/\partial q_2\Delta t\end{vmatrix}$$

Наибольший вклад в якобиан дают члены, стоящие на диагонали. Их произведение дает

$$D=1+\left(\frac{\partial\dot{p}_1}{\partial p_1}+\frac{\partial\dot{p}_2}{\partial p_2}+\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_1}+\frac{\partial\dot{q}_2}{\partial q_2}\right)\Delta t+O(\Delta t)^2. \quad (24.6)$$

Все остальные слагаемые детерминанта также имеют величину порядка $(\Delta t)^2$ и меньше. Таким образом

$$D\approx 1+div\bar{S}\cdot\Delta t\,, \quad (24.7)$$

где $\vec{S}$ - скорость изображающей точки в фазовом пространстве. Подставляем в (24.6) значения скоростей из уравнений Гамильтона и получаем:

$$D\approx 1+\left(-\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}-\frac{\partial}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)\Delta t=1. \quad (24.8)$$

Очевидно, как доказывается это утверждение в случае большего числа переменных. Итак, теорема Лиувилля доказана.